

Dualität linearer Systeme

Die Eigenschaften linearer Systeme weisen eine Art Symmetrie bezüglich Ein- und Ausgang auf. Beispiele dafür sind z.B. die enge Verwandtschaft zwischen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit oder zwischen Entkopplungsnullstellen des Ein- und Ausgangs (vgl. Vorlesung Robust Control). Diese Symmetrie wurde schon von KALMAN in den 60er Jahren erkannt und mathematisch beschrieben.

Definition 1

Das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}^* &= \mathbf{A}^T \mathbf{x}^* + \mathbf{C}^T \mathbf{u}^* \\ \mathbf{y}^* &= \mathbf{B}^T \mathbf{x}^* + \mathbf{D}^T \mathbf{u}^*\end{aligned}\tag{1}$$

heißt **duales System** zum System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{2}$$

Durch Betrachtung des dualen Systems können Eigenschaften des eigentlichen Systems (2) untersucht werden.

Satz 1

- a) Das System (2) ist genau dann steuerbar, wenn sein duales System (1) beobachtbar ist.
- b) System (2) ist beobachtbar $\Leftrightarrow$ Duales System ist (1) steuerbar.
- c) System (2) ist asymptotisch stabil $\Leftrightarrow$ Duales System ist (1) asymptotisch stabil.
- d) System (2) ist stabilisierbar $\Leftrightarrow$ Duales System ist (1) entdeckbar.
- e) System (2) ist entdeckbar $\Leftrightarrow$ Duales System ist (1) stabilisierbar.

Beweis:

- a) Die Steuerbarkeitsmatrix S_S des originalen System (2)

$$S_S = [\mathbf{B} | \mathbf{A}\mathbf{B} | \mathbf{A}^2\mathbf{B} | \dots | \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]\tag{3}$$

und die Beobachtbarkeitsmatrix P_O^* des dualen Systems (1)

$$P_O^* = [\mathbf{B} | \mathbf{A}\mathbf{B} | \mathbf{A}^2\mathbf{B} | \dots | \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]\tag{4}$$

sind identisch.

- b) analog

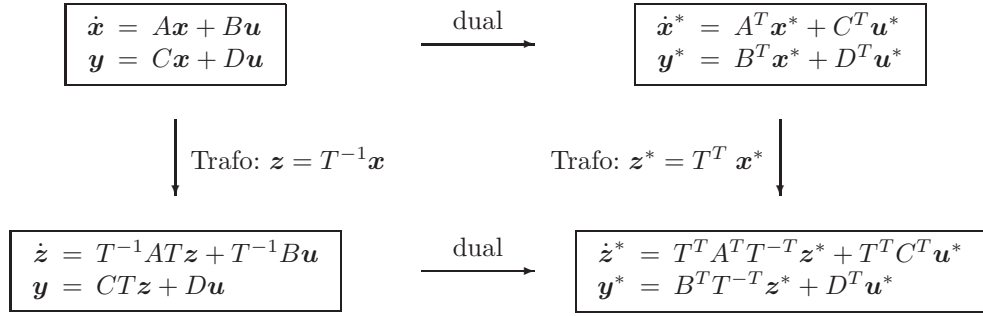


Abbildung 1: Kommutierendes Diagramm mit betrachteten Systemen $(T^{-T} = (T^{-1})^T)$.

- c) Die Eigenwerte einer Matrix sind identisch mit den Eigenwerten der transponierten Matrix A^T . Daraus folgt direkt die Behauptung.
- d) Man kann immer eine Transformation $\mathbf{z} = T^{-1} \mathbf{x}$ für System (1) finden, so daß das transformierte System folgende Normalform hat

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ 0 & A'_{22} \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} B'_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= [C'_1 \quad C'_2] \mathbf{z} + D \mathbf{u} \end{aligned} \quad (5)$$

In dieser Darstellung gilt:

- die Moden von A'_{22} sind nicht steuerbar (entsprechender Eintrag in B' -Matrix ist null).
- A'_{22} ist stabil, da das System laut Voraussetzung stabilisierbar ist und A'_{22} nicht steuerbar ist.
- (A'_{11}, B'_1) ist steuerbar.

Die Idee des Beweises ist die folgende: Zuerst wird das duale System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^* &= A^T \mathbf{x}^* + C^T \mathbf{u}^* \\ \mathbf{y}^* &= B^T \mathbf{x}^* + D^T \mathbf{u}^* \end{aligned} \quad (6)$$

zum transformierten System (5) berechnet. Dieses System wird, wie (5), eine spezielle Gestalt haben, mit deren Hilfe wir zeigen können, daß dieses System entdeckbar ist. Wenn es eine nichtsinguläre Transformation zwischen dem dualen System von $\{A, B, C, D\}$ und dem dualen System von (5) gibt, hat das zu $\{A, B, C, D\}$ duale System die gleichen Eigenschaften, ist also auch entdeckbar (Abbildung 1).

Wir berechnen also zuerst das duale System zu (5)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}^* &= \begin{bmatrix} A'^T_{11} & 0 \\ A'^T_{12} & A'^T_{22} \end{bmatrix} \mathbf{z}^* + \begin{bmatrix} C'^T_1 \\ C'^T_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{y}^* &= [B'^T_1 \quad 0] \mathbf{z}^* + D^T \mathbf{u}^* \end{aligned} \quad (7)$$

und partitionieren $\mathbf{z}^*$ entsprechend den Blöcken in (7)

$$\mathbf{z}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^*_1 \\ \mathbf{z}^*_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Durch die Blockdreiecksgestalt der Dynamikmatrix in (7) hat $\mathbf{z}_2^*$ keinen Einfluß auf die Dynamik von $\mathbf{z}_1^*$. Die Zustände $\mathbf{z}_2^*$ wirken auch nicht direkt auf die Ausgänge $\mathbf{y}^*$, da der entsprechende Eintrag in der Ausgangsmatrix von (7) gleich null ist. Daraus folgt, daß die Moden von $A_{22}'^T$ nicht beobachtbar sind. Die Dynamikmatrix $A_{22}'^T$ ist aber stabil, da A_{22}' stabil ist. Damit (7) entdeckbar ist, muß $(A_{11}'^T, B_1'^T)$ beobachtbar sein. Da gilt

$$\text{rg}[sI - A_{11}' \mid B_1'] = n \quad \forall s \quad (9)$$

gilt auch (transponieren von (9))

$$\text{rg} \begin{bmatrix} sI - A_{11}'^T \\ B_1'^T \end{bmatrix} = n \quad \forall s. \quad (10)$$

Bedingung (10) bedeutet, daß $(A_{11}'^T, B_1'^T)$ beobachtbar ist.

Wir müssen nun noch zeigen, daß System (6) durch eine nichtsinguläre Ähnlichkeitstransformation

$$\mathbf{z}^* = T_D \cdot \mathbf{x}^* \quad (11)$$

in System (7) überführt werden kann. Eine einfache Rechnung bestätigt, daß

$$T_D = T^T \quad (12)$$

eine solche Transformation ist.

e) analog d)

□

Beispiel 1 (Einfache Herleitung des Hautus-Tests auf Steuerbarkeit)

Der Hautus-Test auf Beobachtbarkeit wurde auf dem Merkblatt Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Stabilisierbarkeit und Entdeckbarkeit hergeleitet:

$$\text{rg} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} n \quad \forall \lambda. \quad (13)$$

Idee: Hautus-Test auf Beobachtbarkeit für duales System $\Leftrightarrow$ Hautus-Test auf Steuerbarkeit für das Originalsystem (in der Gleichung ist dann A^T anstelle von A und B^T anstelle von C einzusetzen!). Transponiert man diese Gleichung, so erhält man

$$\text{rg}[(\lambda I - A^T)^T \mid B] \stackrel{!}{=} n \quad \forall \lambda \quad (14)$$

woraus direkt der Hautus-Test auf Steuerbarkeit folgt:

$$\text{rg}[(\lambda I - A) \mid B] \stackrel{!}{=} n \quad \forall \lambda. \quad (15)$$